ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS & INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE EN 2e INGENIEURS - SESSION 1975

Epreuve de MATHEMATIQUES - Durée 4 h

Les Candidats traiteront les EXERCICES I ET II et au choix l'un des exercices III ou IV

Exercice I

On désigne par a, b, h des nombres réels tels que $a \leqslant h \leqslant b$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère :

- la zone sphérique S définie par

  $h \leqslant z \leqslant b$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 - z(a + b) + ab = o$

- le disque D défini par

  $z = h$ $\qquad x^2 + y^2 + h^2 - h(a + b) + ab < o$

- le domaine Ω intérieur à la réunion de S et D

1° Calculer le volume μ de Ω

2° On considère le champ de vecteurs obtenu en associant à tout point M, le vecteur $\vec{V}(M) = \vec{OM}$

Calculer le flux de $\vec{OM}$ à travers S

a) - directement (on posera $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $z = z$)

b) - en utilisant le théorème d'Ostrogradsky.

Exercice II

1° Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Réduire A et préciser la matrice de passage utilisée

2° Résoudre le système différentiel

$$(S1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y + 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 5y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - 6y - 3z \end{cases}$$

où $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont trois fonctions inconnues de la variable t.

3° Résoudre le système différentiel

$$(S2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y + 2z + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 5y + 2z + t \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - 6y - 3z \end{cases}$$

où $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont trois fonctions inconnues de la variable t.

Exercice III

1° Démontrer que $\forall x$ tel que $|x| < 1$, on a

$$A(\theta) = x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \cdots + x^n \cos n\theta + \cdots = \frac{x\cos\theta - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

$$B(\theta) = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + \cdots + x^n \sin n\theta + \cdots = \frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

2° En déduire la valeur des intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\cos\theta - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \cos n\theta \, d\theta \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \sin n\theta \, d\theta$$

3° Développer en séries de Fourier, les fonctions

$$f(\theta) = \frac{-1}{2} \operatorname{Log}(1 - 2x\cos\theta + x^2) \qquad |x| < 1$$

(Log désigne le logarithme népérien)

$$g(\theta) = \operatorname{Arctg} \frac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta} \qquad |x| < 1$$

Exercice IV

Dans le demi-plan $y \geqslant 0$, on considère la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{\sqrt{z}(1 + z^2)^2}$

où $\sqrt{z}$ à la détermination qui prend la valeur 1 pour $z = 1$

1) Avec la détermination ainsi précisée, donner la valeur de $f(z)$ pour $z = 2i$

2) Calculer le résidu de $f(z)$ pour $z = i$

3) On considère l'intégrale $\int f(z)\,dz$ le long du demi-cercle Cr de centre O, de rayon r, dans le demi-plan $y \geqslant 0$

Calculer $\lim \int_{C_r} f(z)\,dz$ quand $r \longrightarrow 0$, $r \longrightarrow +\infty$

4) Calculer $\int f(z)dz$ le long de l'axe réel. Pour cela, on intégrera $f(z)$ sur un contour fermé du demi-plan $y \geqslant 0$ que l'on précisera.

5) En déduire la valeur de

$$H = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2}\,dx$$

On démontrera d'abord la convergence.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail